Analisis Pembuktian Lemma Jabat Tangan Dalam Graf Dengan Prinsip Induksi Matematika

Atabik Muhammad Azfa Shofi / 13520159[1]
Program Studi Teknik Informatika
Sekolah Teknik Elektro dan Informatika
Institut Teknologi Bandung, Jl. Ganesha 10 Bandung 40132, Indonesia
[1]13520159@std.stei.itb.ac.id

***Abstraksi*—Dalam teori Graf, terdapat suatu lemma yang melandasi munculnya teorema-teorema lain, yaitu Lemma Jabat Tangan. Lemma Jabat Tangan mengatakan bahwa untuk setiap graf, jumlah derajat dari semua simpul adalah dua kali jumlah sisi dalam graf tersebut. Dengan menggunakan prinsip induksi matematika, penulis akan mencoba membuktikan kebenaran lemma tersebut dalam makalah ini. Lebih jauh lagi, penulis akan mencoba membuktikan dengan prinsip induki kuat.**

***Kata Kunci*—Graf, lemma jabat tangan, induksi matematika, induksi kuat**

I. PENDAHULUAN

Dalam matematika, salah satu metode pembuktian yang biasa digunakan adalah induksi matematika. Induksi matematika digunakan pada pembuktian yang berhubungan dengan bilangan asli. Proses pembuktian dilakukan dengan membuktikan basis pernyataan, lalu menentukan hipotesis induksi yang akan digunakan untuk membuktikan pernyataan tersebut. Biasanya hipotesis induksi adalah menganggap bahwa untuk setiap bilangan asli n, pernyataan dianggap benar. Lalu, akan dibuktikan kebenaran dari bilangan asli n+1.

Induksi matematika dapat digunakan untuk membuktikan banyak jenis persamaan matematika. Penulis kemudian berpikir untuk melakukan pembuktian menggunakan induksi matematika terhadap lemma jabat tangan dalam teori graf. Lemma ini menyatakan bahwa untuk setiap graf G, total derajat dari semua simpul adalah genap dan merupakan dua kali dari total sisi dalam graf tersebut. Dalam Bahasa matematika dapat ditulis secara sederhana sebagai, d = 2E, dengan d adalah total derajat semua simpul, dan E adalah jumlah sisi.

Penulis berpikir untuk melakukan pembuktian dengan dua cara, yaitu induksi sederhana dan induksi kuat. Pada induksi sederhana akan dilakukan pembuktian sederhana dari persamaan yang telah ditulis di atas. Lalu, secara induksi kuat akan dilakukan dengan melihat suatu graf yang dibentuk dari graf-graf lain yang juga memenuhi lemma jabat tangan. Dengan demikian, penulis membuat makalah ini untuk melakukan analisis pembuktian terhadap lemma jabat tangan dengan menggunakan prinsip induksi matematika.

II. LANDASAN TEORI

1. Induksi Matematika

Induksi matematika adalah perluasan dari logika matematika. Logika matematika adalah materi yang mempelajari tentang pernyataan yang bisa bernilai benar atau salah, ekivalen atau ingkaran sebuah pernyataan, dan juga berisi penarikan kesimpulan.

Induksi matematika menjadi sebuah metode pembuktian secara deduktif yang digunakan untuk membuktikan suatu pernyataan benar atau salah. Induksi dalam arti ini merupakan suatu proses atau aktivitas berpikir untuk menarik kesimpulan berdasarkan pada kebenaran pernyataan yang berlaku secara umum sehingga pada pernyataan khusus atau tertentu juga bisa berlaku benar. Dalam induksi matematika ini, variabel dari suatu perumusan dibuktikan sebagai anggota dari himpunan bilangan asli. Dalam matematika, proses induksi ini biasanya dilakukan dengan membuktikan bahwa jika pernyataan benar untuk setiap bilangan n, maka untuk bilangan n+1, pernyataan tersebut juga benar.

Proses induksi dilakukan dalam dua langkah, yaitu basis induksi dan langkah induksi. Dalam prinsip induksi sederhana, basis induksi hanya perlu dilakukan dengan menunjukkan bahwa untuk bilangan basis (umumnya 0 atau 1), pernyataan dapat bernilai benar. Jika langkah basis benar, maka selanjutnya melakukan langkah induksi. Langkah induksi dilakukan dengan menggunakan hipotesis induksi, yaitu bahwa untuk bilangan bulat n, pernyataan bernilai benar, selanjutnya dengan hipotesis tersebut, dilakukan pembuktian bahwa untuk setiap bilangan n+1, pernyataan tersebut juga dapat bernilai benar.

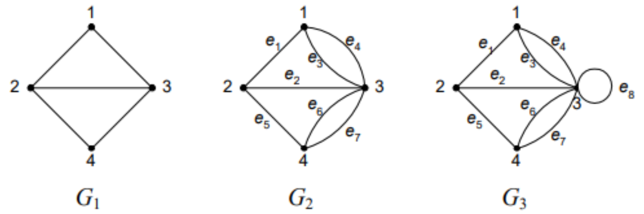
2. Prinsip Induksi Kuat

Dalam proses induksi, terkadang dibutuhkan lebih dari satu hipotesis induksi. Dalam kasus ini, digunakan prinsip induksi kuat untuk melakukan pembuktian. Prinsip induksi kuat digunakan untuk membuktikan kebenaran pernyataan untuk setiap $n \geq n_0$. Proses pembuktiannya mirip seperti prinsip induksi sederhana, yaitu melakukan basis induksi dengan membuktikan kebenaran pernyataan untuk n_0. Lalu, menggunakan hipotesis induksi dan membuktikan bahwa untuk n+1, pernyataan juga benar. Bedanya, pada prinsip induksi kuat, hipotesis yang digunakan lebih dari satu, yaitu untuk setiap n_0+1 sampai n, pernyataan bernilai benar.

3. Definisi Graf

Graf muncul sebagai penggambaran dari persoalan jembatan koenigsberg pada tahun 1736. Seiring perkembangan jaman, graf digunakan untuk merepresentasikan hubungan objek-objek diskrit, dan keterkaitannya. Graf digambarkan dengan simpul yang merperesentasikan objek, dan sisi, yang menghubungkan simpul satu dengan lainnya.

Suatu graf G dituliskan sebagai G = (V,E), dengan V adalah himpunan simpul-simpul yang terdapat dalam graf $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, dan E adalah himpunan sisi-sisi yang terdapat dalam graf $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.



Gambar 2.3.1. Contoh Graf

Pada gambar 2.3.1, terdapat tiga contoh graf. Masing-masing graf tersebut dapat ditulis sebagai berikut :

G_1 = ({1 ,2, 3, 4}, {(1,2), (1,3), (2,3), (2,4), (3,4)})
G_2 = ({1, 2, 3, 4}, {(1,2), (2, 3), (1,3), (1,3), (2,4), (3,4), (3,4)})
G_3 = ({1, 2, 3, 4}, {(1,2), (2,3), (1,3), (1,3), (2,4), (3,4), (3,4), (3,3)})

4. Terminologi dalam Graf

Dalam teori graf, terdapat berbagai terminologi atau istilah untuk memudahkan pemahaman terhadap teori graf, beberapa terminologi akan dibahas sebagai berikut :

a. Ketetanggaan

Ketetanggan (adjacency) adalah hubungan antara dua simpul, kedua simpul dikatakan bertetangga jika keduanya terhubung langsung oleh sebuah sisi.

Tinjau kembali gambar 2.3.1. Pada graf G1, simpul 1 dan 2 dikatakan bertetangga karena terdapat sisi (1,2), begitupun 2 dan 3, karena teradapat sisi (2,3). Tetapi, simpul 1 dan 4 tidak bertetangga karena tidak ada sisi pada graf yang merupakan (1,4).

b. Bersisian

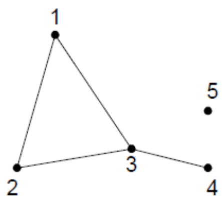
Bersisian adalah hubungan antara sisi dengan simpul. Suatu sisi e = (i,j) dikatakan bersisian dengan simpul i dan simpul j. Artinya, setiap sisi dikatakan bersian dengan simpul-simpul yang dihubungkan olehnya.

Tinjau kembali gambar 2.3.1. Pada graf G2, sisi (2,4) dikatakan bersisian dengan simpul 2 dan 4, begitupun sisi (1,3) bersisian dengan simpul 1 dan 3, namun tidak dengan simpul 2 dan 4.

c. Simpul terpencil

Pada graf, terkadang terdapat suatu simpul yang tidak mempunyai sisi yang berisisan dengannya, simpul itulah yang dikatakan sebagai simpul terpencil

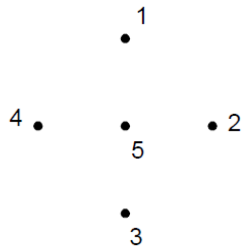
Tinjau gambar 2.4.1. di bawah, pada graf tersebut, simpul 5 adalah simpul terpencil karena tidak terdapat sisi yang berisian dengannya.



Gambar 2.4.1. Contoh graf dengan simpul terpencil

d. Graf kosong

Dalam graf, terdapat istilah graf kosong untuk graf yang himpunan simpul-simpulnya beranggotakan simpul terpencil semua, atau dalam kata lain anggota himpunan sisi pada graf tersebut adalah kosong.



Gambar 2.4.2. Contoh graf kosong

Gambar 2.4.2 di atas adalah contoh graf kosong, karena tidak terdapat sisi sama sekali dalam graf tersebut.

e. Derajat

Suatu simpul pada graf memliki nilai derajat dengan notasi d(v). Derajat pada simpul adalah jumlah sisi yang bersisian dengan simpul tersebut.

Tinjau kembali gambar 2.3.1. Pada graf G_2, derajat simpul 1 atau d(1) adalah 3, begitupun d(2) dan d(4), dan d(3) adalah 5. Pada graf G_3 terdapat sisi gelang pada simpul 3, tiap sisi gelang akan dihitung 2 derajat, maka d(3) menjadi 2 + 5 = 7.

f. Lintasan

Lintasan dalam graf dari simpul i ke j adalah barisan selang seling dari simpul dan sisi-sisi yang menghubungkan simpul i dengan simpul j. Panjang lintasan adalah banyaknya sisi yang dilewati dalam lintasan tersebut.

Tinjau kembali gambar 2.3.1. Pada graf G_1, terdapat lintasan 1-4 yaitu (1, (1,2), 2, (2,3), 3, (3,4), 4) yang panjangnya 3, atau lintasan 1-4 seperti (1, (1,2), 2, (2,4), 4) yang panjangnya 2. Artinya, lintasan dari i ke j terdapat banyak kemungkinan dengan panjang yang berbeda-beda.

g. Siklus atau sirkuit

Siklus atau sirkuit dalam graf adalah lintasan yang bermula dari simpul id an kembali lagi ke simpul i, biasanya dituliskan sebagai barisan simpul-simpul yang dilewati.

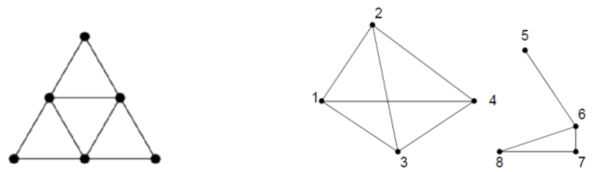
Tinjau kembali gambar 2.3.1. Pada graf G_1 terdapat sirkuit 1,2,4,3,1 dengan panjang sirkuit 4 karena melewati

4 sisi yaitu (1,2), (2,4), (4,3), dan (3,1). Sama seperti lintasan, sirkuit dari simpul i bisa jadi memiliki banyak kemungkinan jalan dan panjang sirkuit.

h. Keterhubungan

Keterhubungan (connected) adalah hubungan antara dua simpul, kedua simpul dikatakan terhubung apabila terdapat lintasan dari simpul satu ke simpul lainnya.

Terdapat istilah graf terhubung dan graf tidak terhubung. Graf terhubung adalah graf yang setiap simpul v_i dan v_j dalam graf tersebut terhubung, untuk setiap i dan j. Selain itu, graf dikatakan tidak terhubung. Berikut adalah contoh graf terhubung dan tidak terhubung:



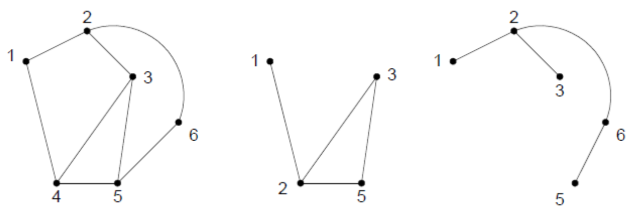
Gambar 2.4.3. Contoh graf terhubung dan tidak terhubung

Graf kiri pada gambar 2.4.3. di atas adalah graf terhubung, sedangkan gambar kanan adalah graf tidak terhubung.

Pada graf berarah, graf dikatakan terhubung jika graf tidak berarahnya adalah graf terhubung. Graf terhubung pada graf berarah dapat dibagi lagi menjadi graf terhubung kuat dan terhubung lemah. Graf dikatakan terhubung kuat jika untuk setiap simpul u dan v, terdapat lintasan berarah dari u ke v dan dari v ke u. Selain itu, graf dikatakan terhubung lemah.

i. Upagraf dan komplemen upagraf

Upagraf artinya adalah graf bagian dari graf awal. Jika terdapat graf G = (V,E), maka upagraf $G_1 = (V_1,E_1)$ jika $V_1 \subseteq V$ dan $E_1 \subseteq E$. Atau dapat dikatakan graf bagian dari G adalah potongan graf tersebut. Untuk sebuah upagraf G_1, terdapat komplemen upagraf tersebut, yaitu upagraf dari graf G, yang melengkapi G_1 untuk membentuk graf G. Berikut adalah contoh dari graf bagian (upagraf) dan komplemennya:



Gambar 2.4.4. Contoh upagraf

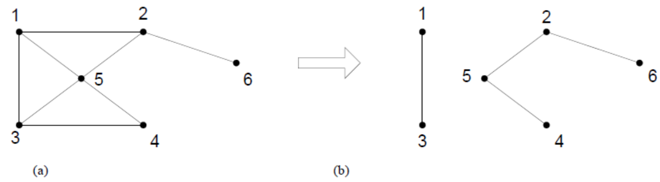
Pada gambar di atas, gambar kiri adalah contoh graf G, gambar tengah adalah upagraf dari G, dan gambar kanan adalah komplemen dari upagraf tersebut.

j. Upagraf merentang

Upagraf G_1 dikatakan upagraf merentang dari G, jika simpul pada G_1 sama dengan simpul pada G atau $V_1 = V$. Artinya, seluruh simpul pada G termasuk dalam upagraf, namun tidak semua sisi terdapat pada upagraf.

k. Cut-set

Untuk setiap graf terhubung, akan terdapat cut-set, yaitu himpunan sisi-sisi yang apabila sisi tersebut dibuang atau dihilangkan dari graf, maka graf tersebut menjadi graf tidak terhubung. Pembuangan atau penghilangan sisi cut-set pasti menyebabkan graf terbagi menjadi dua komponen.

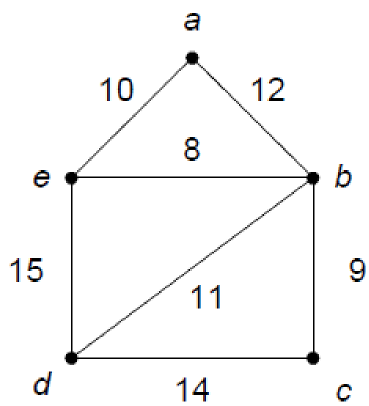


Gambar 2.4.5. Contoh cut-set

Pada gambar di atas, cut-set nya adalah ((1,2), (1,5), (3,5), (3,4)) yang menyebabkan graf (a) terbagi dua menjadi graf pada gambar (b).

l. Graf berbobot

Graf berbobot adalah graf yang tiap sisinya mempunyai bobot atau nilai masing-masing, sehingga tiap lintasan dari simpul satu ke lainnya mempunyai jumlah nilai yang berbeda-beda. Graf berbobot biasanya lebih sering dipakai dalam aplikasi di dunia nyata, karena tiap jalur dari satu titik ke titik lain biasanya mempunyai jarak, harga atau nilai yang berbeda-beda. Lebih lanjut lagi terdapat algoritma khusus untuk mencari upagraf merentang paling efisien dari graf berbobot, seperti algoritma prim dan kruskal. Namun, tidak akan dibahas di sini. Berikut adalah contoh graf berbobot :



Gambar 2.4.6. Contoh graf berbobot

Pada gambar di atas dapat dilihat bahwa untuk tiap sisi mempunyai nilai yang berbeda-beda, misalnya sisi (a,b) mempunyai nilai 12, dst.

5. Lemma Jabat Tangan

Lemma jabat tangan mengatakan bahwa untuk setiap graf G, jumlah derajat dari semua simpulnya adalah genap, yaitu dua kali dari jumlah semua sisinya. Dalam matematika, ditulis jika G = (V,E), maka $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$.

Misal, kita tinjau kembali tiga graf pada gambar 2.3.1.
Tinjau G_1 : d(1) + d(2) + d(3) + d(4) = 2 + 3 + 3 + 2 = 10 = 2 * jumlah sisi = 2 * 5

Tinjau G_2 : d(1) + d(2) + d(3) + d(4) = 3 + 3 + 5 + 3 = 14 = 2 * jumlah sisi = 2 * 7

Tinjau G_3 : d(1) + d(2) + d(3) + d(4) = 3 + 3 + 7 + 3 = 16 = 2 * jumlah sisi = 2 * 8

Dapat dilihat bahwa untuk ketiga graf tersebut, total derajat semua simpulnya adalah dua kali jumlah sisinya, yang bersesuaian dengan lemma jabat tangan.

III. PEMBAHASAN

Pada pembahasan kali ini, akan dibagi menjadi dua bagian, yaitu bagian induksi sederhana dan bagian prinsip induksi kuat. Pada tiap bagian akan memiliki basis induksi yang sama, perbedaan terdapat pada hipotesis induksi dan proses pembuktian. Akan digunakan beberapa simbol untuk mempermudah penulisan, yaitu R untuk total jumlah derajat untuk setiap simpul dan E untuk total sisi.

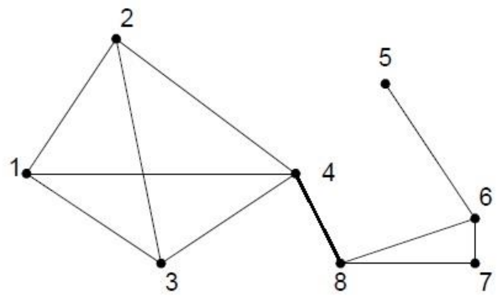
Pada proses induksi, total simpul pada graf tidak terlalu berpengaruh, artinya adalah bahwa yang dilihat dan menjadi basis bukanlah banyak simpul, namun banyak sisi. karena pada simpul terpencil jumlah derajat adalah 0.

Jadi, untuk basis induksi akan digunakan E = 1. Untuk jumlah sisi 1, maka pasti terdapat 2 simpul yang dihubungkan oleh sisi tersebut, terlepas ada berapa banyak simpul dalam graf. Artinya, tiap simpul yang bersisian dengan sisi E, akan memiliki derajat 1, karena hanya terdapat 1 sisi yang bersisian dengannya yaitu E. Oleh karena itu total derajat r pada graf adalah 2*1 = 2. Hal tersebut sesuai dengan lemma jabat tangan bahwa untuk setiap graf, R = 2E.

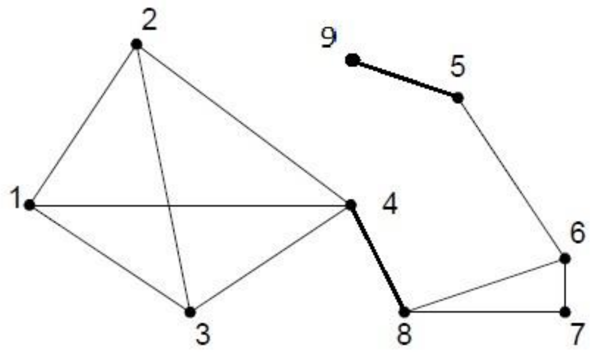
A. Induksi sederhana

Hipotesis induksi : Misalkan untuk sembarang graf G, jika jumlah sisi pada graf adalah E, maka pernyataan bahwa jumlah derajat semua simpul R = 2E adalah benar.

Akan dibuktikan bahwa untuk graf G dengan jumlah sisi E+1, maka R1 = 2(E+1) benar. Perhatikan graf di bawah ini :



Misalkan graf tersebut adalah graf G, dengan sisi E dan derajat R = 2E. Akan dilakukan penambahan satu simpul yaitu simpul 9, dan satu sisi yaitu (5,9), seperti berikut ini:



Misal graf baru tersebut adalah G1. Karena dilakukan penambahan sisi pada graf G, maka jumlah sisi pada graf G1 adalah E1 = E+1. Namun, akibat penambahan sisi tersebut maka derajat R juga berubah, karena terdapat perubahan jumlah derajat pada simpul 5 dan penambahan derajat pada simpul 9.

Pada simpul 5 derajat bertambah satu, karena terdapat satu sisi tambahan yang bersisian dengannya yaitu sisi (5,9). Sedangkan pada simpul 9, derajatnya adalah 1, karena simpul 9 adalah simpul baru dan memiliki sisi tambahan yang bersisian dengannya yaitu sisi (5,9). Artinya, derajat R bertambah 2 atau R1 = R + 2.

Menurut lemma jabat tangan:

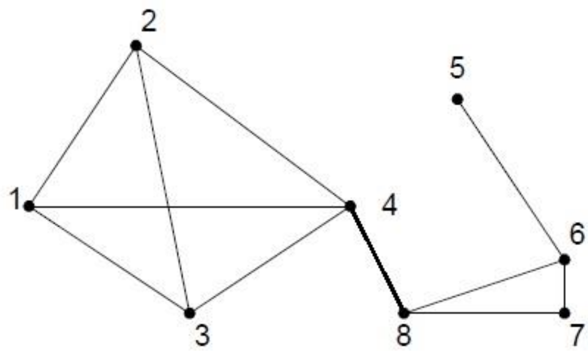
$$R1 = R + 2$$
$$R1 = 2E + 2$$
$$R1 = 2(E + 1)$$

Didapat bahwa R1 = 2(E+1) atau R1 = 2E1, yang sesuai dengan lemma jabat tangan. Maka, untuk setiap graf G, bahwa lemma jabat tangan yang berbunyi R = 2E terbukti benar.

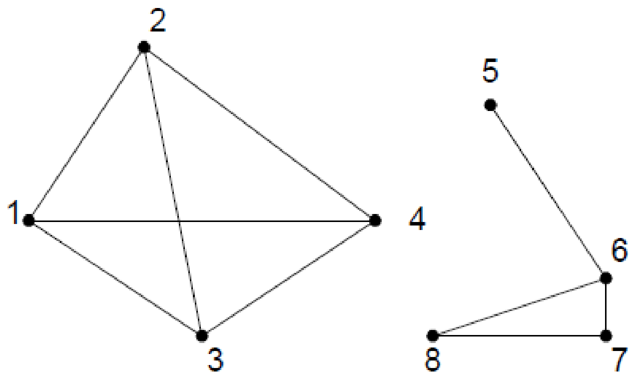
B. Induksi kuat

Pada bagian ini, akan dicoba meninjau pembuktian secara lebih jauh lagi, yaitu dengan membagi suatu graf menjadi bagian-bagian yang lebih kecil dengan prinsip cut-set. Atau prosesnya dapat dibalik, bahwa jika terdapat graf-graf yang memenuhi lemma jabat tangan, maka dapat dibentuk satu graf dari graf-graf tersebut yang juga memenuhi lemma jabat tangan.

Perhatikan graf di bawah ini :



Misal, graf di atas adalah graf G yang dibentuk dari graf-graf di bawah ini :



Graf G1 adalah graf kiri dengan V1 = (1,2,3,4), dan G2 adalah graf kanan dengan V2 = (5,6,7,8). Misalkan, kedua graf G1 dan G2 memenuhi lemma jabat tangan yaitu R1 = 2E1 dan R2 = 2E2. Maka, akan dibuktikan bahwa graf G memenuhi R = 2E.

Jika ditinjau ulang, graf G adalah graf gabungan dari G1 dan G2 dengan tambahan sisi (4,8) artinya E = E1+E2+1. Karena, kedua graf digabung, maka terdapat penambahan derajat pada simpul 4 dan 8 akibat penambahan sisi (4,8). Artinya penambahan sisi menyebabkan derajat bertambah dua atau R = R1+R2+2.

Menurut lemma jabat tangan:

$$R = 2E$$
$$R = 2(E1 + E2 + 1)$$
$$R = 2E1 + 2E2 + 2$$

Karena, menurut hipotesis induksi, 2E1 = R1 dan 2E2 = R2, maka:

$$R = R1 + R2 + 2$$

Hal tersebut menunjukkan bahwa untuk graf G yang dibentuk dari G1 dan G2, lemma jabat tangan juga berlaku, artinya lemma jabat tangan terbukti benar.

Lebih jauh lagi, pemecahan graf tidak terbatas menjadi 2 graf saja, namun lebih. Selain itu, penambahan sisi untuk menghubungkan 2 graf tidak terbatas dua sisi saja. Misalkan graf G dipecah menjadi M graf, dengan masing-masing penggabungan graf dilakukan penambahan N sisi. Misal untuk tiap graf memenuhi RX = 2EX. Akan dibuktikan bahwa R = 2E untuk graf G.

Karena graf G akan dibentuk dari M graf, maka penambahan sisi untuk penggabungan graf akan dilakukan sebanyak M-1 kali, dengan tiap penggabungan menambah N sisi. Artinya,
$E \ = \ E1 + E2 + \cdots + EM + N(M-1)\ldots(1)$

Karena penambahan sisi, maka derajat untuk simpul yang diberi tambahan sisi juga berubah sebanyak 1, dan tiap penambahan sisi melibatkan 2 simpul, maka penambahan derajat menjadi 2. Karena jumlah penambahan sisi adalah N(M-1) kali, maka jumlah penambahan derajat adalah 2N(M-1). Artinya,
$R \ = \ R1 + R2 + \cdots + RM + 2N(M-1)\ldots(2)$

Menurut lemma jabat tangan, RX = 2EX. Sehingga persamaan (2) dapat diubah menjadi:
$R \ = \ 2E1 + 2E2 + \cdots + 2EM + 2N(M-1)$
$R \ = \ 2(E1 + E2 + \cdots + EM + N(M-1))$

Dengan melihat persamaan (1), maka didapat bahwa $R = 2E$ yang bersesuaian dengan lemma jabat tangan. Maka, untuk setiap graf G total derajat R = 2E adalah benar. Maka, lemma jabat tangan terbukti benar.

IV. KESIMPULAN

Prinsip induksi matematika dapat digunakan untuk membuktikan berbagai pernyataan matematis yang berhubungan dengan bilangan asli. Lalu, dengan menggunakan prinsip induksi matematika, dan lebih jauh lagi menggunakan prinsip induksi kuat, lemma jabat tangan dalam teori graf dapat dibuktikan kebenarannya. Untuk semua graf dengan banyak sisi sebanyak n, maka total derajat semua simpulnya adalah 2n, sehingga total simpul selalu genap.

V. UCAPAN TERIMA KASIH

Alhamdulillah, segala puji serta syukur saya panjatkan kepada Allah Swt. yang telah memberi kesempatan bagi saya untuk menyelesaikan makalah ini. Selain itu, ucapan terima kasih juga saya sampaikan kepada dosen pengampu mata kuliah Matematika Diskrit, khususnya Dr. Nur Ulfa Maulidevi, S.T., M.Sc. sebagai dosen di kelas K03, yang telah memberi saya banyak ilmu sehingga saya dapat menyelesaikan makalah ini. Saya juga berterima kasih kepada kedua orangtua dan saudara-saudara saya, yang selalu mendukung dan mendoakan saya.

DAFTAR PUSTAKA

[1] Munir, Rinaldi. Induksi Matematika (Bagian 1). Matematika Diskrit. https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2020-2021/Induksi-matematik-bagian1-2020.pdf (diakses pada 10 Desember 2021 pukul 19.34 WIB).

[2] Munir, Rinaldi. Induksi Matematika (Bagian 2). Matematika Diskrit. https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2020-2021/Induksi-matematik-bagian1-2020.pdf (diakses pada 10 Desember 2021 pukul 19.34 WIB).

[3] Munir, Rinaldi. Graf (Bag.1). Matematika Diskrit. https://informatika.stei.itb.ac.id/~rinaldi.munir/Matdis/2020-2021/Graf-2020-Bagian1.pdf (diakses pada 12 Desember 2021 pukul 14.20 WIB).

[4] https://www.studiobelajar.com/induksi-matematika/ (diakses pada 10 Desember 2021 pukul 20.00 WIB).

PERNYATAAN

Dengan ini saya menyatakan bahwa makalah yang saya tulis ini adalah tulisan saya sendiri, bukan saduran, atau terjemahan dari makalah orang lain, dan bukan plagiasi.

Tangerang Selatan, 14 Desember 2021

Atabik Muhammad Azfa Shofi, 13520159